國立臺灣海洋大學河海工程學系 2014 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 給一非齊次線性微分方程如下

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = x^3 \sin x$$

並知此微分方程的補解為 x 與 x^2

(1) 試求常數 a 、b 為何? (5%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (10%)　　(100 中興土木)

2. 已知二階 ODE

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$$

(1) 試以待定係數法(Undeterminated coefficient method)求特解。 (6%)

(2) 試以參數變異法(Variation parameter method)求特解。 (6%)

3. 試求微分方程式 $x^2 y'' + 3xy' + y = \dfrac{2\ln x}{x}$ 之通解。 (10%)　　(102 成大土木)

4. 試求下述 ODE 之通解

(1) $\dfrac{d^6y}{dx^6} - 4\dfrac{d^5y}{dx^5} + 29\dfrac{d^4y}{dx^4} - 100\dfrac{d^3y}{dx^3} + 100\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ (7%)

(2) $(x+2)^2 y'' - (3x+6)y' + 4y = 3x+2$ (7%)　　(102 成大環工)

(3) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ (7%)

5. (1) 試求微分方程 $y''(t) + 4\omega_0^2 y(t) = \cos(2\omega t)$ 之兩補解 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 與其 Wronskian，即 $W(y_1, y_2) = ?$ 。 (10%)

(2) 當 $\omega \neq \omega_0$ 時，此微分方程之特解為何? (5%)

(3) 當 $\omega = \omega_0$ 時，此微分方程之特解為何? (5%)

(4) 說明何謂激發(excitation)、拍擊(beating)與共振(resonance)　(12%)
(試繪簡圖輔助說明)

6. 已知 $y(x) = e^x$ 為方程式 $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^x$ 之一補解，試求此方程式之通解。 (10%)

參考解答:

1. (1) $\because$ x 與 x^2 為微分方程的齊次解

$\therefore$ 將 $y = x$ 帶入 ODE 可得 $ax + bx = 0 \quad \Rightarrow a + b = 0$

將 $y = x^2$ 帶入 ODE 可得 $2x^2 + 2ax^2 + bx^2 = 0 \quad \Rightarrow 2a + b = -2$

所以可知: $a = -2$, $b = 2$

此微分方程為 $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3 \sin x$

補解為 $y_h(x) = c_1 x + c_2 x^2$

(2) 使用參數變異法來求其特解

令其特解 $y_p(x) = u_1 x + u_2 x^2$ 代回 ODE 後可得

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \dfrac{x^3 \sin x}{x^2} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{-x^3 \sin x}{x^2} = -x \sin x$$

$$\Rightarrow u_1 = -\int x \sin x \, dx = x \cos x - \sin x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{x^3 \sin x}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{x^2 \sin x}{x^2} = \sin x \quad \Rightarrow u_2 = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\therefore \quad y_p(x) = (x \cos x - \sin x)x + (-\cos x)x^2 = -x \sin x$$

通解 $y = y_h(x) + y_p(x) = c_1 x + c_2 x^2 - x \sin x$

2. (1) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$

令 $y = e^{\lambda x} \quad \Rightarrow (\lambda^2 + 5\lambda + 6)e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2 \quad \text{or} \quad \lambda = -3$

$\therefore \quad y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

令 $y_p = axe^{-2x} \quad \Rightarrow y_p' = a(1 - 2x)e^{-2x}$

$\Rightarrow y_p'' = a(4x - 4)e^{-2x}$ 代回 ODE 可得

$$a(4x - 4)e^{-2x} + 5a(1 - 2x)e^{-2x} + 6axe^{-2x} = e^{-2x} \quad \Rightarrow a = 1$$

$\therefore$ 特解 $y_p = xe^{-2x}$, 通解 $y = y_h + y_p = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + xe^{-2x}$

(2) 使用參數變異法來求其特解

令其特解 $y_p(x)=u_1e^{-2x}+u_2e^{-3x}$ 代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-3x}\\ e^{-2x} & -3e^{-3x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-2x} & e^{-3x}\\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-5x}}{-e^{-5x}}=1 \quad\Rightarrow u_1=x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}e^{-2x} & 0\\ -2e^{-2x} & e^{-2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-2x} & e^{-3x}\\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x}\end{vmatrix}}=\frac{e^{-4x}}{-e^{-5x}}=-e^{x} \quad\Rightarrow u_2=-e^{x}$$

$y_p(x)=x\cdot e^{-2x}-e^{x}e^{-3x}=xe^{-2x}-e^{-2x}$ (e^{-2x} 為補解，可寫可不寫)

3. $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{2\ln x}{x}$

令 $t=\ln x \quad \Rightarrow x=e^t$

$$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{x}Y'$$

$$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=-\frac{1}{x^2}Y'+\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{dY'}{dt}=-\frac{1}{x^2}Y'+\frac{1}{x^2}Y''=\frac{1}{x^2}(Y''-Y')$$

代回 ODE 可得: $Y''+2Y'+Y=2te^{-t}$

$\therefore\ Y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$

令 $Y_p=(at+b)\cdot t^2e^{-t} \quad \Rightarrow Y_p'=(-at^3-bt^2+3at^2+2bt)\cdot e^{-t}$

$$\Rightarrow Y_p''=(at^3-6at^2+bt^2-4bt+6at+2b)\cdot e^{-t}$$

代回 ODE 可得: $(at^3-6at^2+bt^2-4bt+6at+2b)\cdot e^{-t}$

$$+2(-at^3-bt^2+3at^2+2bt)\cdot e^{-t}+(at+b)\cdot t^2e^{-t}=2te^{-t}$$

$$\Rightarrow (6at+2b)\cdot e^{-t}=2te^{-t}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{3},\ \ b=0 \quad \Rightarrow Y_p=\frac{1}{3}t^3e^{-t}$$

$$\therefore\ Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+\frac{1}{3}t^3e^{-t}$$

$$\Rightarrow y(x)=c_1x^{-1}+c_2x^{-1}\cdot\ln x+\frac{1}{3}x^{-1}\cdot(\ln x)^3$$

法二: 使用參數變異法來求其特解

令其特解 $y_p(t)=u_1e^{-t}+u_2te^{-t}$ 代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & te^{-t}\\ 2te^{-t} & (1-t)e^{-t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t}\end{vmatrix}}=\frac{-2t^2e^{-2t}}{e^{-2t}}=-2t^2 \quad \Rightarrow u_1=-\frac{2}{3}t^3$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}e^{-t} & 0\\ -e^{-t} & 2te^{-t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\ -e^{-t} & (1-t)e^{-t}\end{vmatrix}}=\frac{2te^{-2t}}{e^{-2t}}=2t \quad \Rightarrow u_2=t^2$$

$$\therefore \quad y_p(t)=-\frac{2}{3}t^3\cdot e^{-t}+t^2\cdot te^{-t}=\frac{1}{3}t^3e^{-t}$$

4. (1) $\dfrac{d^6y}{dx^6}-4\dfrac{d^5y}{dx^5}+29\dfrac{d^4y}{dx^4}-100\dfrac{d^3y}{dx^3}+100\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

令 $y=e^{\lambda x}$ $\Rightarrow (\lambda^6-4\lambda^5+29\lambda^4-100\lambda^3+100\lambda^2)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)^2(\lambda^2+25)=0$

$\Rightarrow \lambda=0,0,2,2,\pm 5i$

$$\therefore \quad y(x)=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}+c_5\cos 5x+c_6\sin 5x$$

(2) $(x+2)^2y''-(3x+6)y'+4y=3x+2$

令 $t=x+2$ $\quad\Rightarrow \dfrac{dy(x)}{dx}=\dfrac{dt}{dx}\cdot\dfrac{dY(t)}{dt}=Y'(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY'(t)}{dt}=Y''(t)$$

$\therefore \quad (x+2)^2y''-(3x+6)y'+4y=3x+2 \Rightarrow t^2Y''-3tY'+4Y=3t-4$

令 $z=\ln t$ $\quad\Rightarrow t=e^z \quad \Rightarrow \dfrac{dY(t)}{dt}=\dfrac{dz}{dt}\cdot\dfrac{dG(z)}{dz}=\dfrac{1}{t}G'(z)$

$$\Rightarrow \frac{d^2Y(t)}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}G'(z)+\frac{1}{t}\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dG'(z)}{dz}=\frac{1}{t^2}[G''(z)-G'(z)]$$

$t^2Y''-3tY'+4Y=3t-4 \quad \Rightarrow G''-4G'+4G=3e^z-4$

令 $G=e^{\lambda z}$ $\quad\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \quad \Rightarrow \lambda=2,2$

$$\therefore \quad G_h(z)=c_1e^{2z}+c_2e^{2z}\cdot z$$

令 $G_p=ae^z+b$ 代回 ODE 可得 $a=3$, $b=-1$

$\therefore\ G(z)=G_h(z)+G_p(z)=c_1e^{2z}+c_2e^{2z}\cdot z+3e^z-1$

$\Rightarrow Y(t)=c_1t^2+c_2t^2\cdot\ln t+3t-1$

$\Rightarrow y(x)=c_1(x+2)^2+c_2(x+2)^2\cdot\ln(x+2)+3x+5$

(3) $xy''+(x+2)y'+y=0$ (7%)

令 $a_2=x$，$a_1=x+2$，$a_0=1$

由判斷式: $a_2''-a_1'+a_0=0$ 可知此為正合式

$$xy''+(x+2)y'+y=\frac{d}{dx}[b_1(x)y'+b_0(x)y]$$

$\Rightarrow b_1(x)y''+[b_1'(x)+b_0(x)]+b_0'(x)y=xy''+(x+2)y'+y \quad \Rightarrow b_1=x$，$b_0=x+1$

$$\therefore\ xy''+(x+2)y'+y=\frac{d}{dx}[xy'+(x+1)y]=0$$

$\Rightarrow\ xy'+(x+1)y=c_1$ 此為一階線性 ODE

$$\Rightarrow\ y'+\frac{x+1}{x}y=c_1\frac{1}{x}$$

積分因子: $\mu=e^{\int\frac{x+1}{x}dx}=e^{(x+\ln x)}=xe^x$

同乘積分因子: $xe^xy'+e^x(x+1)y=c_1e^x$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(xe^xy)=c_1e^x$$

$$\Rightarrow xe^xy=c_1e^x+c_2$$

$$\Rightarrow y=c_1\frac{1}{x}+c_2\frac{e^{-x}}{x}$$

5. (1) $y''(t)+4\omega_0^2y(t)=0\Rightarrow y_h(t)=c_1\cos2\omega_0t+c_2\sin2\omega_0t$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos2\omega_0t & \sin2\omega_0t\\ -2\omega_0\sin2\omega_0t & 2\omega_0\cos2\omega_0t\end{vmatrix}=2\omega_0$$

(2) 當 $\omega\neq\omega_0$ 時

$$y_p=a\cos(2\omega t)+b\sin(2\omega t)\Rightarrow y_p'=-2\omega a\sin(2\omega t)+2\omega b\cos(2\omega t)$$

$$\Rightarrow y_p''=-4\omega^2a\cos(2\omega t)-4\omega^2b\sin(2\omega t)$$

$\therefore$ 代回 ODE 並比較係數後可得 $a=\dfrac{1}{4(\omega_0^2-\omega^2)}$，$b=0$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{4(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(2\omega t)$$

(3) 當 $\omega = \omega_0$ 時

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{1}{4(\omega_0^2 - \omega^2)}[\cos(2\omega t) - \cos(2\omega_0 t)]$$

$$= \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{-2t\sin(2\omega t)}{4(-2\omega)}$$

$$= \frac{t\sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0}$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{t\sin(2\omega_0 t)}{4\omega_0}$$

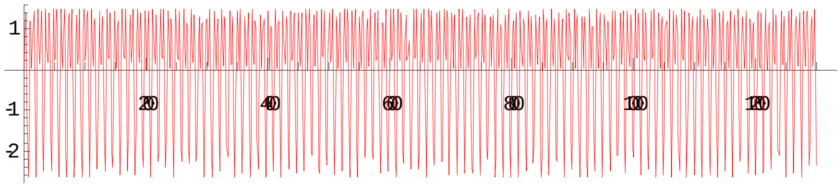
(4)

激發 (Excitation): 當無阻尼時(c=0)，外力頻率(ω)與物體自然頻率(ω_0)不同時，因受外力影響產生週期性的振動現象

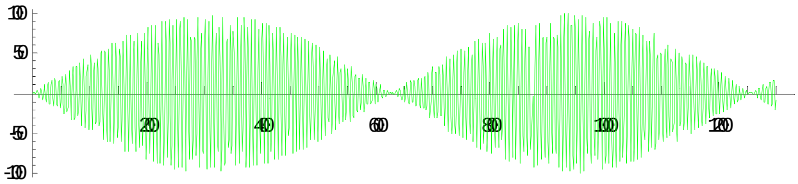
拍擊 (Beating): 當無阻尼時(c=0)，外力頻率(ω)接近物體自然頻率(ω_0)，會產生週期性的振動現象

共振 (Resonance): 當無阻尼時(c=0)，外力頻率(ω)和物體自然頻率(ω_0)相吻合，而激發出大幅振動的現象

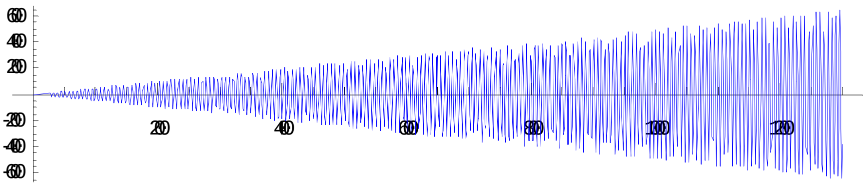
$\omega \neq \omega_0$ 激發



$\omega \approx \omega_0$ 拍擊



$\omega = \omega_0$ 共振



6. $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=e^x$ 已知一補解 $y_1=e^x$

令另一補解 $y_2=ve^x \Rightarrow y_2'=v'e^x+ve^x$

$$\Rightarrow y_2''=v''e^x+2v'e^x+ve^x$$

帶入 ODE: $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=0$

可得 $x(v''e^x+2v'e^x+ve^x)+2(1-x)(v'e^x+ve^x)+(x-2)ve^x=0$

$\Rightarrow xv''e^x+2v'e^x=0$

令 $z=v' \Rightarrow z'+\frac{2}{x}z=0 \Rightarrow z=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow v=-\frac{1}{x}$$

$\therefore$ 另一補解 $y_2=\frac{1}{x}e^x$，且 $y_h=c_1e^x+c_2\frac{1}{x}e^x$

由參數變異法求特解

令其特解 $y_p(x)=u_1e^x+u_2\frac{1}{x}e^x$代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & x^{-1}e^x \\ \frac{1}{x}e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & x^{-1}e^x \\ e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x\end{vmatrix}}=\frac{-x^{-2}e^{2x}}{-x^{-2}e^{2x}}=1 \Rightarrow u_1=x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}e^x & 0 \\ e^x & \frac{1}{x}e^x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x & x^{-1}e^x \\ e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x\end{vmatrix}}=\frac{x^{-1}e^{2x}}{-x^{-2}e^{2x}}=-x \Rightarrow u_2=-\frac{1}{2}x^2$$

$\therefore \quad y_p(x)=xe^x-\frac{1}{2}xe^x=\frac{1}{2}xe^x$

$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2\frac{1}{x}e^x+\frac{1}{2}xe^x$