

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 給一非齊次線性微分方程如下

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = x^3 \sin x$$

並知此微分方程的補解為 x 與 x^2

- (1) 試求常數 a 、 b 為何? (5%)
 (2) 試求此微分方程之通解。 (10%)

2. 已知二階 ODE

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$$

- (1) 試以待定係數法(Undetermined coefficient method)求特解。 (6%)
 (2) 試以參數變異法(Variation parameter method)求特解。 (6%)

3. 試求微分方程式 $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{2 \ln x}{x}$ 之通解。 (10%)

4. 試求下述 ODE 之通解

(1) $\frac{d^6 y}{dx^6} - 4 \frac{d^5 y}{dx^5} + 29 \frac{d^4 y}{dx^4} - 100 \frac{d^3 y}{dx^3} + 100 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ (7%)

(2) $(x+2)^2 y'' - (3x+6)y' + 4y = 3x+2$ (7%)

(3) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ (7%)

5. (1) 試求微分方程 $y''(t) + 4\omega_0^2 y(t) = \cos(2\omega t)$ 之兩補解 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 與其

Wronskian, 即 $W(y_1, y_2) = ?$ 。 (10%)

- (2) 當 $\omega \neq \omega_0$ 時, 此微分方程之特解為何? (5%)
 (3) 當 $\omega = \omega_0$ 時, 此微分方程之特解為何? (5%)
 (4) 說明何謂激發(excitation)、拍擊(beatting)與共振(resonance) (12%)

(試繪簡圖輔助說明)

6. 已知 $y(x) = e^x$ 為方程式 $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = e^x$ 之一補解, 試求此方程式之通解。 (10%)